

## ENSEÑANZA-APRENDIZAJE DE ECUACIONES DIFERENCIALES ORDINARIAS MEDIANTE MODELACIÓN MATEMÁTICA

Ángel Homero Flores S.      Manuel Falconi M.

ahfs@unam.mx      jefatura.posgrado@ciencias.unam.mx

Colegio de Ciencias y Humanidades Facultad de Ciencias UNAM-México

Modalidad: CB

Nivel: Terciario-Universitario

Tema: Pensamiento Matemático Avanzado

Palabras clave: Modelación Matemática; Modelo Matemático; Ecuaciones Diferenciales Ordinarias.

### Resumen

*Consideramos la modelación matemática como el proceso de hallar un modelo matemático que reproduzca los datos obtenidos durante el estudio de un fenómeno (natural o no) y que nos ayude a entenderlo mejor. Así, un modelo matemático puede ser cualquier objeto matemático que sirva para tal fin: una ecuación, una desigualdad o una función, entre otros.*

*La modelación matemática resulta ser un buen vehículo para enseñar matemática en todos los niveles educativos a partir de sus aplicaciones, en especial en los niveles medio superior y superior.*

*En el presente trabajo se presentará un esquema teórico del proceso de modelación en la enseñanza y se darán algunos ejemplos de su instrumentación en la enseñanza-aprendizaje de Ecuaciones Diferenciales Ordinarias.*

### Introducción

Desde hace siglos se ha utilizado a la matemática como una herramienta para resolver problemas y como una teoría que ayuda a entender mejor la realidad en donde nos desempeñamos. En este sentido, la modelación matemática ha servido como herramienta que ayuda a entender fenómenos, naturales o no, a través de su problematización.

En un ambiente escolarizado, es posible utilizar la modelación como una estrategia para enseñar y aprender matemática desde sus aplicaciones, quitándole ese carácter abstracto que tanto ha dificultado su aprendizaje.

Consideramos la modelación matemática como el proceso de hallar un modelo matemático que reproduzca los datos obtenidos durante el estudio de un fenómeno (natural o no) y que nos ayude a entenderlo mejor. Así, un modelo matemático puede ser cualquier objeto matemático que sirva para tal fin: una ecuación, una desigualdad o una función, entre otros. Así, coincidimos con Ferruzzi, Gonçalves, Hruschka, y de Almeida (2004) quienes afirman lo siguiente:

*El uso de la Matemática como lenguaje simbólico conduce a una representación de las situaciones problema en términos matemáticos. Un modelo matemático puede entenderse*

*como un conjunto de símbolos y relaciones matemáticos que representan una situación, un fenómeno o un objeto real a ser estudiado. Los modelos matemáticos pueden ser expresados a través de gráficos, tablas, ecuaciones, sistemas de ecuaciones, etc. (pág. 1354)*

La modelación puede usarse para ejemplificar las aplicaciones de la matemática, pero también para introducir nuevos conocimientos y para que el estudiante ejercite los que ya posee. Para una mejor comprensión del uso que se puede dar a la modelación como estrategia de enseñanza recomendamos consultar el 14vo. Estudio ICMI (Blum, Galbraith, Hen y Niss, 2007).

En el Seminario de Evaluación Alternativa en Matemática (SEAM) del Colegio de Ciencias y Humanidades de la UNAM, como parte del modelo de enseñanza *Aprender Matemática, Haciendo Matemática* (Flores, 2010) se ha venido utilizando la modelación como una estrategia de enseñanza-aprendizaje.

En la Figura 1 se presenta el diagrama de flujo que muestra el desarrollo de la modelación en el aula.

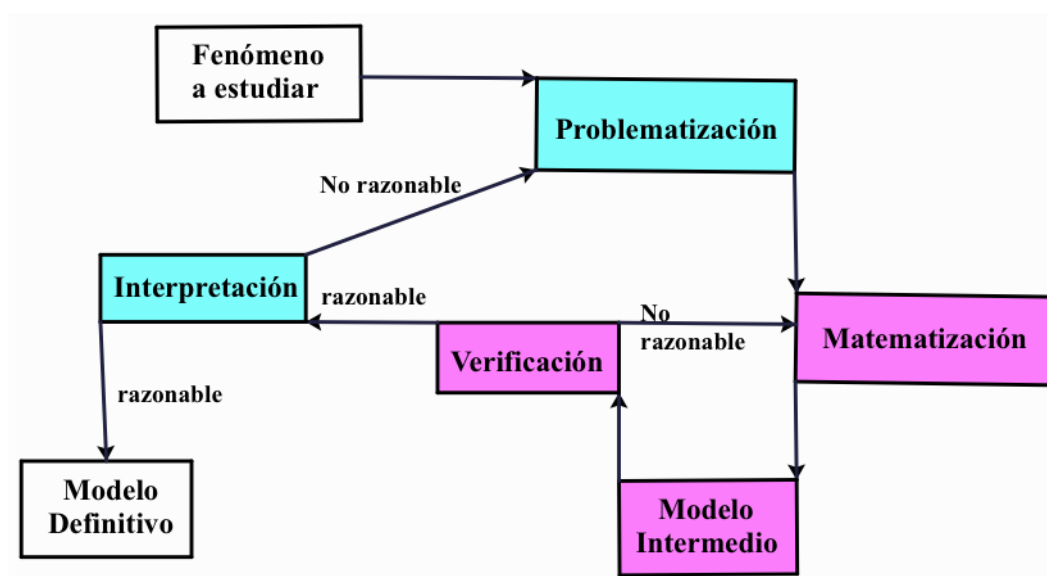


Figura 1. Proceso de modelación en el aula.

El proceso se inicia con la intención de *estudiar un cierto fenómeno*. Dependiendo de los intereses del estudio, el fenómeno se traduce en un problema o una serie de problemas a ser resueltos en lo que hemos llamado *Problematización*. Una vez problematizado el fenómeno, procedemos a expresarlo en términos matemáticos, es decir, lo *matematizamos* convirtiéndolo en un problema matemático. La solución del problema es un modelo que hemos llamado intermedio pues es necesario *verificar* que realmente esté resolviendo el problema de manera razonable. De no ser este el caso, se regresa al problema en busca de un modelo más adecuado, hasta que nos parezca razonable o resuelva realmente el problema matemático. Cuando el modelo es aceptable pasamos a

*interpretar* el modelo en términos del problema original. Si la interpretación no es razonable, iniciamos el proceso revisando nuestro problema o planteando uno nuevo, hasta llegar a un modelo definitivo.

En este esquema podemos entrar en dos ciclos, uno que cae enteramente en el ámbito matemático y se refiere a la solución del problema matematizado, y el otro que tiene que ver con la interpretación del modelo y que incluye el ciclo anterior.

Dependiendo del nivel escolar y de los objetivos de enseñanza, se puede empezar el proceso desde el estudio del fenómeno mediante una investigación documental o de campo o a partir del problema que representa el aspecto del fenómeno que se quiere estudiar.

En *Aprender Matemática, Haciendo Matemática* los problemas de modelación se clasifican en dos tipos: *piensa y actúa* y *ajuste de curvas*.

En los problemas *piensa y actúa* es posible determinar qué modelo matemático puede servir mejor para reproducir los datos del fenómeno; mientras que en los de *ajuste de curvas* no es posible, de entrada, aventurar un modelo plausible, por lo que se grafican los datos del problema como puntos y se busca una función cuya gráfica se ajuste lo mejor posible a dichos puntos. El procedimiento y el conocimiento que se pone en juego con estos dos tipos de problemas es diferente. Mientras que los primeros implican un cierto conocimiento de la situación y de los modelos que se pueden utilizar, los segundos requieren de un cierto procedimiento estándar que propicia la mecanización de algoritmos.

Muchos problemas se pueden tratar como de un tipo o del otro, esto dependerá del conocimiento del estudiante y de los objetivos de aprendizaje.

### **El estudio de las Ecuaciones Diferenciales Ordinarias**

En la mayoría de los cursos introductorios de Ecuaciones Diferenciales Ordinarias (EDO) en los que se utiliza la modelación matemática, el enfoque se centra en una exposición de la teoría para después ver sus aplicaciones en problemas de modelación. Casi siempre, estos cursos introductorios se centran más en el repaso y la aplicación de técnicas de integración, y se asemejan más a un curso de cálculo que de ecuaciones diferenciales. La propuesta que hemos venido desarrollando parte del estudio de ciertos fenómenos y del planteamiento de problemas relacionados con ellos. Durante el proceso de modelación surge la necesidad de repasar algunos conceptos matemáticos o de introducirlos como parte de la teoría necesaria para resolver el problema. En la metodología propuesta el trabajo en equipo es muy importante, pues permite el intercambio de ideas y la puesta en común del conocimiento pertinente.

En lo que resta de la sección comentaremos los pormenores de uno de estos cursos. Éste se dio en el contexto de la maestría en Matemática Educativa de la Facultad de Matemáticas de la Universidad Veracruzana en México.

El curso se dio con el nombre de Seminario de Análisis II, correspondiente al tercer semestre de la maestría mencionada. El grupo estuvo integrado por ocho estudiantes de los cuales dos son profesores de matemática del nivel Bachillerato y el resto de secundaria. Con excepción de dos de los integrantes que tenían una carrera en matemática pura, los demás nunca habían tomado un curso de EDO y su única experiencia en cálculo fue un curso introductorio dictado como parte de la misma maestría. Tuvo una duración de 60 horas con sesiones sabatinas de 6 horas cada una. Además de las sesiones presenciales se contó con un espacio virtual en Internet, <https://amhm-ecuacionesdiferenciales.wikispaces.com/>, en donde se subirían algunas actividades, tareas y lecturas extra; asimismo se darían discusiones sobre la temática en el foro de la misma wiki.

Debido a cuestión de espacio, comentaremos sólo uno de los problemas que se trataron y los comentarios finales de uno de los estudiantes.

El problema parte de la siguiente tabla que da la edad en semanas de una conjunto de pavos hembra en una granja brasileña y los correspondientes masa y ración de alimentos que consumen (Biembengut y Hein, 2000).

Edad	Masa (g)	Alimento (g)	Edad	Masa (g)	Alimento (g)
1	107	104	10	4194	1568
2	222	230	11	4870	1710
3	423	340	12	5519	1957
4	665	470	13	6141	1969
5	971	700	14	6732	2093
6	1466	922	15	7290	2115
7	2079	1146	16	7813	2165
8	2745	1270	17	8299	2160
9	3495	1396	18	8744	2180

Se pidió a los estudiantes que graficaran la edad con respecto a la masa y la edad con respecto al consumo de alimento, para cada caso plantearan una EDO y la resolvieran. La función obtenida fue graficada en el mismo sistema de referencia de los datos graficados anteriormente y se verificara

qué tan buen modelo era el que habían encontrado. Se les pidió que a partir de las dos gráficas (edad y masa, edad y alimento) determinaran el tiempo más adecuado para sacrificar a los pavos o para venderlos.

El estudiante del que presentaremos algunas partes de su trabajo es profesor de tercero de secundaria y su formación es como profesor normalista.

Para la relación entre la edad y la masa planteó la siguiente ecuación:

M: La masa de los pavos  
 $r - bM$ : La tasa de crecimiento de los pavos  
 $b$ : La constante de decrecimiento de los pavos

$$\frac{dM}{dt} = (r - bM)M$$

Haciendo algunas suposiciones, tomando en cuenta los datos de la tabla, plantea la siguiente ecuación:

$$\int \frac{KdM}{M(K-M)} = \int rdt$$

En la que  $K$  es la masa máxima que pueden obtener los pavos (supuso, sin dar argumentos, que  $K = 9000$ ).

La solución que obtuvo de esta ecuación fue:

$$M = \frac{9000}{e^{4.7756 + 0.3556t} + 1}$$

Para responder a la pregunta si el modelo encontrado es un buen modelo para el caso del crecimiento en masa de los pavos, el estudiante graficó la función encontrada en el mismo sistema de referencia que los puntos de la tabla (Figura 2). Y la conclusión es que el modelo es bueno para reproducir los datos de la tabla.

Este problema empieza con una situación problematizada: la cría de pavos en una granja. Y el procedimiento podría considerarse un combinación *piensa y actúa* y de *ajuste de curvas*.

Observando esta parte de la solución del problema, podría decirse que es de esperarse que se tenga tal desempeño en un curso de Ecuaciones Diferenciales, pero vale la pena destacar algunos aspectos con respecto al estudiante y avance.

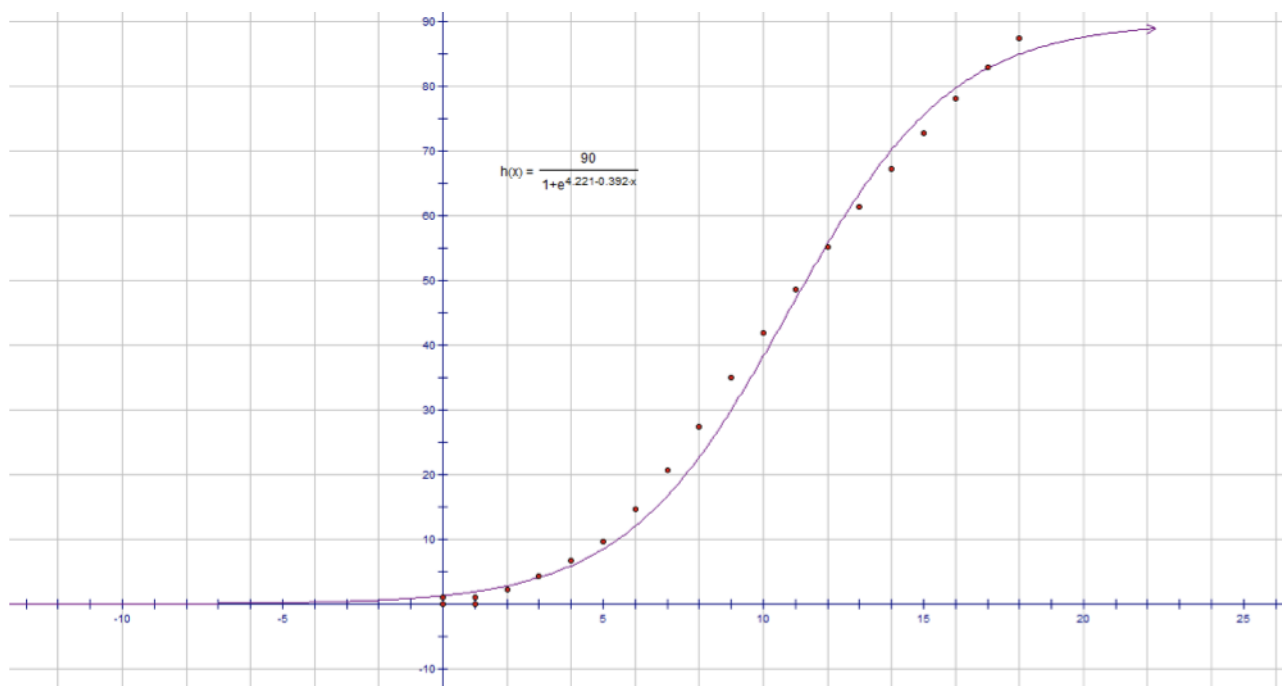


Figura 2. Gráfica del modelo del crecimiento de pavos y su comparación con los datos de la tabla.

- No poseía antecedentes matemáticos más allá de lo que enseña en secundaria y lo visto en los dos semestres anteriores de la maestría (introducción al álgebra, elementos de geometría euclidiana, y un curso de geometría analítica y cálculo).
- Según lo expresó en su trabajo, utilizó la técnica de integración por fracciones parciales que nunca, hasta el momento del curso, había visto.
- Nunca había trabajado con logaritmos.

Es decir, la resolución de los problemas de modelación propició un ambiente de aprendizaje en el cual la modelación fue el vehículo para aprender matemática y aplicar la que ya se conocía.

### Comentarios sobre el curso

Algunos de los comentarios que este estudiante hizo al final del curso son los siguientes:

*El curso que hoy culminamos, Análisis II (Ecuaciones diferenciales), ha estado lleno de problemas que han incitado a la reflexión en dos grandes polos, uno es, la reflexión acerca de cada uno de los planteamientos de los problemas, que nos llevó a comprender las variaciones en contextos reales muy diversos, y, la aplicación de la modelización matemática en el proceso de plantear, resolver y llegar a proponer modelos matemáticos que expliquen la realidad.*

*El segundo polo, ... el planteamiento de los problemas nos llevó en ocasiones a dar un repaso a conceptos matemáticos que dada la naturaleza de la didáctica utilizada era necesario tener como*

*antecedentes: propiedades de los logaritmos, técnicas de derivación, técnicas de integración, etc., por ello esto fue un gran reto para quienes como yo nunca habíamos planteado una ecuación diferencial y obviamente nunca las había resuelto; en este sentido creo que ha quedado una gran satisfacción para quienes nuestro diferencial de aprendizaje fue mayor.*

*También considero que el curso, en ocasiones se tornó un poco inseguro para muchos pues, faltaban bases sólidas que llevaran al planteamiento analítico de los problemas y dada la diversidad profesional del grupo acentuó un rezago para algunos compañeros; esta lógica me lleva a plantear: que las actividades a realizar deben enriquecerse con un repaso de Cálculo diferencial e integral; de actividades didácticas que procuren el planteamiento de problemas acorde a las necesidades de todos los estudiantes, pues es en la diversidad donde los menos favorecidos por el perfil se ven afectados, pero como dice un amigo no es lo que traen los alumnos, sino lo que debemos hacer para regularizarlos y avanzar en conjunto.*

## **Conclusión**

En las reflexiones del estudiante se habla de la inseguridad que se sentía al no tener bases sólidas que permitieran un mejor desempeño en el curso. Comentarios parecidos aparecieron en varias ocasiones por lo que sería un aspecto en el que habría que poner más atención. Parte de la estrategia planeada para ir subsanando este tipo de situaciones fue el planteamiento de discusiones virtuales, pero el recurso se utilizó muy poco y por sólo algunos integrantes del grupo. Por consiguiente, podemos decir que la modelación matemática, como estrategia de enseñanza-aprendizaje, podría mejorar si se instrumentan efectivamente otras herramientas como Internet.

La intención del uso de la modelación en la enseñanza es que el estudiante aplique su conocimiento matemático y aprenda los conceptos nuevos que le servirán en lo sucesivo, mientras busca un modelo matemático, hace que el estudiante no perciba cabalmente lo aprendido como tal. Por ejemplo el caso de nuestro estudiante, repasó temas de álgebra y cálculo y aprendió otros como expansiones en series de potencias y logaritmos, además que aprendió a utilizar un software de Geometría Dinámica del cual sólo había oído hablar. Esto sin mencionar lo aprendido de EDO.

Los foros de discusión virtuales podrían servir para hacer que el estudiante adquiriera conciencia sobre este conocimiento que pasa desapercibido. Para ello es necesario crear la cultura de la discusión, por un lado, y por otro, fomentar el uso de las herramientas virtuales que se tienen a mano.

## Referencias

- Bienbengut, M. S. y Hein, N. (2000). *Modelagem matemática no ensino*. Sao Paulo, Brasil: Editora Contexto.
- Ferruzzi, E. C., Gonçalves, M. B., Hruschka, J. y de Almeida, L M. W. (2004). Modelagem matemática como estratégia de ensino e aprendizagem nos cursos superiores de tecnologia. *Memorias del World Congress on Engineering and Technology Education*. Sao Paulo, Brasil.
- Flores, A. H. (2010). Learning Mathematics, Doing Mathematics: A Learner Centered Teaching Model. *Educação Matemática e Pesquisa*, vol. 12, núm. 1: 75-78.
- Blum, W., Galbraith, P. L., Hen, H. y Niss. M. (eds.). (2007). *Modelling and Applications in Mathematics Education*. The 14<sup>th</sup> ICMI Study. Springer.